Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 4. С. 651–661.
Полнотекстовая версия в свободном доступе http://nd.ics.org.ru
DOI: 10.20537/nd1604008

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.38
MSC 2010: 70E05, 70E17

Об асимптотических движениях тяжелого твердого тела в случае Бобылева – Стеклова

Г. В. Горр

Решение Бобылева – Стеклова относятся к одному из наиболее известных частных решений уравнения Эйлера – Пуассона задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Оно характеризуется двумя линейными инвариантными соотношениями и выражается в виде эллиптических функций времени. Истолкование движения гироскопа Бобылева – Стеклова проведено П. В. Харламовым с помощью метода Пуансо. Исследование окрестности решения Бобылева – Стеклова в интегральном многообразии уравнений Эйлера – Пуассона указано Б. С. Бардиным для случая, когда это решение описывает маятниковые движения. Поэтому представляет интерес исследование общего случая указанного многообразия. На основе первого метода Ляпунова получен новый класс асимптотических движений тяжелого твердого тела, предельные движения которых описываются решением Бобылева – Стеклова.

Ключевые слова: первый метод Ляпунова, решение Бобылева – Стеклова

Получено 05 мая 2016 года
После доработки 09 августа 2016 года

Горр Геннадий Викторович
gvgorr@gmail.com
Отдел прикладной механики
ГУ «Институт прикладной математики и механики»
83114, ДНР, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, д. 74

Введение

Исследование асимптотических решений уравнений аналитической механики является важным этапом в анализе интегрального многообразия дифференциальных уравнений движения рассматриваемых механических систем. Асимптотические решения в этой области науки изучали А. Кнезер [1], О. Перрон [2], П. Боль [3] и другие (см., например, обзоры [4, 5]). Для уравнений динамики твердого тела представляют интерес результаты С. В. Болотина, В. В. Козлова [6], В. В. Козлова, В. П. Паламодова [7], А. П. Маркеева [8–12], полученные с помощью нелинейных методов. Первый метод Ляпунова [13] также оказался эффективным в задаче изучения асимптотических движений твердого тела с неподвижной точкой (асимптотически маятниковых [14], асимптотически прецессионных [15], асимптотически равномерных [16, 17] и других движений [18]). В статье [19] изложен общий метод исследования асимптотически периодических движений твердого тела, которые описываются дифференциальными уравнениями класса Кирхгофа – Пуассона, и указывается обзор результатов по асимптотическим движениям твердого тела. Данная статья посвящена изучению асимптотических движений тяжелого твердого тела, предельное движение которых описывается решением Д. К. Бобылева [20], В. А. Стеклова [21]. Ранее движение гироскопа Бобылева – Стеклова методом Пуансо изучалось П. В. Харламовым [22]. Б. С. Бардин [23] рассмотрел маятникообразные движения твердого тела в случае Бобылева – Стеклова, то есть случай движения тела, который характеризуется частным вариантом этого решения. Здесь изучаются асимптотические движения тела, которые определяются общим вариантом интегрируемости уравнений Эйлера – Пуассона, который установлен Д. К. Бобылевым и В. А. Стекловым. Показано, что существуют такие значения параметров распределения масс тела и параметров решения, при которых движение обладает свойством асимптотичности, характеризующееся однопараметрическими рядами Ляпунова.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнения Эйлера – Пуассона в векторной форме [22]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + s(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}), \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1.1}$$

Эти уравнения имеют интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \qquad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \qquad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2s(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \tag{1.2}$$

где k, E — произвольные постоянные.

В (1.1), (1.2) приняты следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, указывающий направление силы тяжести, $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — единичный вектор, имеющий значение $\dfrac{\boldsymbol{OC}}{|\boldsymbol{OC}|}$ (O — неподвижная точка, C — центр тяжести), параметр $s = mg|\boldsymbol{OC}|$ (m — масса тела, g — ускорение свободного падения), $A = (A_{ij})$ — тензор инерции тела в точке O, точка над переменными $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$ обозначает относительную производную по времени t.

Решение Бобылева – Стеклова [20, 21] для уравнений (1.1) существует при следующих условиях на параметры задачи:

$$A = \mathrm{diag}(2A_2, A_2, A_3), \quad e_1 = 1, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0. \tag{1.3}$$

Для записи решения [20, 21] при условиях (1.3) будем использовать скалярную форму (1.1), (1.2) в безразмерных переменных и параметрах, которые введем так:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{s}{A_2}}\,\widetilde{\omega}_i, \qquad t = \sqrt{\frac{A_2}{s}}\,\tau, \qquad a = \frac{A_3}{A_2}, \tag{1.4}$$

где $\widetilde{\omega}_i$, τ — безразмерные величины, параметр s полагается положительным за счет выбора подвижной системы координат. Опуская в дальнейшем знак тильды и обозначая дифференцирование по τ штрихом, из (1.1), (1.2) с учетом (1.3) имеем

$$\omega_1' = \frac{1-a}{2}\,\omega_2\omega_3, \quad \omega_2' = (a-2)\omega_2\omega_3 - \nu_3, \quad \omega_3' = \frac{1}{a}\,(\omega_1\omega_2 + \nu_2), \tag{1.5}$$

$$\nu_1' = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \nu_2' = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \nu_3' = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2, \tag{1.6}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad 2\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2 + a\omega_3\nu_3 = k_*, \quad 2\omega_1^2 + \omega_2^2 + a\omega_3^2 - 2\nu_1 = 2E_*. \tag{1.7}$$

В (1.7) параметры k_*, E_* введены вместо k, E. Для простоты в (1.7) звездочки опускаем. Параметр a изменяется в интервале $(1,3)$. Принимая в качестве вспомогательной переменной ν_1, запишем решение Бобылева–Стеклова

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \varkappa, \quad \omega_2^2 = 2(\nu_1 - h), \quad \omega_3 = 0,\\ &\nu_2 = -\varkappa\omega_2, \quad \nu_3 = \sqrt{-\nu_1^2 - 2\varkappa^2\nu_1 + 1 + 2\varkappa^2 h},\\ &\nu_1' = -\sqrt{2(\nu_1 - h)(-\nu_1^2 - 2\varkappa^2\nu_1 + 1 + 2\varkappa^2 h)}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где h, $\varkappa$ — произвольные постоянные, связанные с постоянными k, E формулами

$$k = 2h\varkappa, \qquad E = \varkappa^2 - h.$$

В силу геометрического смысла переменной $\nu_1 \in [-1,1]$ параметр h удовлетворяет условию $h < 1$. В дальнейшем для применения первого метода А. М. Ляпунова нам потребуется условие $h > 0$. Поэтому будем считать, что в (1.8) параметр h удовлетворяет условию $h \in (0,1)$, а параметр $\varkappa$ принимает произвольные значения.

Для сведения решения (1.8) к эллиптическим функциям Якоби введем обозначения

$$\nu_1^{(1)} = h, \qquad \nu_1^{(2,3)} = -\varkappa^2 \pm \sqrt{\varkappa^4 + 2\varkappa^2 h + 1}. \tag{1.9}$$

В (1.9) знак плюс соответствует значению $\nu_1^{(2)}$, знак минус — значению $\nu_1^{(3)}$. Решение уравнений (1.8) для ν_i представим в более компактной форме

$$\begin{aligned} &\nu_1(\tau) = \alpha_1(\tau) = \nu_1^{(2)} - (\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)})\,\mathrm{sn}^2 u,\\ &\nu_2(\tau) = \alpha_2(\tau) = -\varkappa\sqrt{2(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)})}\,\mathrm{cn}\,u,\\ &\nu_3(\tau) = \alpha_3(\tau) = \sqrt{(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)})(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)})}\,\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{dn}\,u, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $u = \sqrt{\dfrac{\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}}{2}}\,\tau$, $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ — эллиптические функции Якоби, модуль которых равен $k^* = \sqrt{\dfrac{\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}}{\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}}}$. Компоненты угловой скорости из (1.8) в силу (1.10) таковы:

$$\omega_1(\tau) = \varkappa, \qquad \omega_2(\tau) = -\frac{\alpha_2(\tau)}{\varkappa}, \qquad \omega_3(\tau) = 0. \tag{1.11}$$

Таким образом, решение Бобылева – Стеклова выражено через эллиптические функции Якоби в виде соотношений (1.10), (1.11). Переменная ν_1 изменяется в промежутке $[\nu_1^{(1)}, \nu_1^{(2)}]$, значение $\nu_1^{(3)}$ очевидно удовлетворяет неравенству $\nu_1^{(3)} < \nu_1^{(1)}$.

Фазовый вектор системы (1.5), (1.6) обозначим через вектор $\boldsymbol{p} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$, то есть $p_1 = \omega_1$, $p_2 = \omega_2$, $p_3 = \omega_3$, $p_4 = \nu_1$, $p_5 = \nu_2$, $p_6 = \nu_3$. Невозмущенное решение Бобылева – Стеклова в силу (1.10), (1.11) имеет вид

$$\begin{aligned} &p_1^{(H)}(\tau) = \varkappa, && p_2^{(H)}(\tau) = -\frac{\alpha_2(\tau)}{\varkappa}, && p_3^{(H)}(\tau) = 0,\\ &p_4^{(H)}(\tau) = \alpha_1(\tau), && p_5^{(H)}(\tau) = \alpha_2(\tau), && p_6^{(H)}(\tau) = \alpha_3(\tau). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Это решение является периодическим по переменной τ. Обозначая точкой производную по τ, из (1.10), (1.12) получим

$$\begin{aligned} &\dot p_1^{(H)}(\tau) = 0, && \dot p_2^{(H)}(\tau) = -\alpha_3(\tau), && \dot p_3^{(H)}(\tau) = 0,\\ &\dot p_4^{(H)}(\tau) = \frac{\alpha_2(\tau)\alpha_3(\tau)}{\varkappa}, && \dot p_5^{(H)}(\tau) = \varkappa\alpha_3(\tau), && \dot p_6^{(H)}(\tau) = -\frac{\alpha_2(\tau)(\alpha_1(\tau)+\varkappa^2)}{\varkappa}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Для анализа асимптотических решений уравнений (1.5), (1.6) введем возмущения q_i, полагая

$$p_i(\tau) = p_i^{(H)}(\tau) + q_i(\tau). \tag{1.14}$$

Первый метод Ляпунова [13] основан на свойствах правильности линейной системы по переменным $q_i(\tau)$ и существовании у этой системы определенного числа положительных характеристических чисел. В [19] показано, что так как система (1.5), (1.6) имеет три первых интеграла (1.7), то в силу результатов Пуанкаре система в вариациях для $q_i(\tau), (i = \overline{1,6})$ имеет четыре нулевых характеристических числа, поэтому на основании гамильтоновости системы (1.5), (1.6) асимптотические ряды Ляпунова могут иметь следующее представление

$$q_i(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} L_i^{(m)}(\tau)\beta_0^m (e^{-\lambda\tau})^m \quad (i = \overline{1,6}), \tag{1.15}$$

где β_0 — малая произвольная постоянная, λ — положительное характеристическое число уравнений в вариациях, характеристические числа функций $L_i^{(m)}(\tau)$ не менее нуля. Ряды (1.15) сходятся абсолютно, и при $\tau \to \infty$ имеем $q_i(\tau) \to 0$.

Подставим выражения (1.14) в уравнения (1.5), (1.6) и запишем систему первого приближения:

$$\begin{aligned} &q_1'(\tau) = \frac{a-1}{2\varkappa}\,\alpha_2(\tau)q_3(\tau), \qquad q_2'(\tau) = \varkappa(a-2)q_3(\tau) - q_6(\tau),\\ &q_3'(\tau) = \frac{1}{a}\left(-\frac{\alpha_2(\tau)}{\varkappa}\,q_1(\tau) + \varkappa q_2(\tau) + q_5(\tau)\right),\\ &q_4'(\tau) = -\alpha_3(\tau)q_2(\tau) + \alpha_2(\tau)q_3(\tau) + \frac{\alpha_2(\tau)}{\varkappa}\,q_6(\tau),\\ &q_5'(\tau) = \alpha_3(\tau)q_1(\tau) - \alpha_1(\tau)q_3(\tau) + \varkappa q_6(\tau),\\ &q_6'(\tau) = -\alpha_2(\tau)q_1(\tau) + \alpha_1(\tau)q_2(\tau) - \frac{\alpha_2(\tau)}{\varkappa}\,q_4(\tau) - \varkappa q_5(\tau). \end{aligned} \tag{1.16}$$

В силу (1.7), система (1.16) имеет первые интегралы

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1(\tau)q_4(\tau) + \alpha_2(\tau)q_5(\tau) + \alpha_3(\tau)q_6(\tau) = c_1,\\
&2\alpha_1(\tau)q_1(\tau) + \alpha_2(\tau)q_2(\tau) + a\alpha_3(\tau)q_3(\tau) + 2\varkappa q_4(\tau) - \frac{\alpha_2(\tau)}{\varkappa}\,q_5(\tau) = c_2,\\
&2\varkappa q_1(\tau) - \frac{\alpha_2(\tau)}{\varkappa}\,q_2(\tau) - q_4(\tau) = c_3.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Здесь c_i, $i = \overline{1,3}$, — произвольные постоянные. На основании автономности системы (1.5), (1.6) уравнения линейного приближения (1.16) допускают частное решение

$$
q_i^{(\text{ч})}(\tau) = \dot{p}_i^{(H)}(\tau),
\tag{1.18}
$$

где функции $\dot{p}_i^{(H)}(\tau)$ определены соотношениями (1.13).

Для определения условий существования асимптотических решений (1.15) в статье решена задача интегрирования системы (1.16), (1.17) и нахождения условий существования положительного характеристического числа этой системы.

2. Первый этап редукции уравнений (1.16)

Система (1.16) является линейной системой с периодическими функциями. А. М. Ляпунов [13] показал, что существует линейное преобразование переменных $q_i(\tau)$, $i = \overline{1,6}$, приводящее систему (1.16) к системе с постоянными коэффициентами. Однако использовать это свойство для (1.16) с коэффициентами, которые являются эллиптическими функциями Якоби, весьма затруднительно, поэтому в статье предлагается поэтапное преобразование (1.16).

Первый этап преобразования состоит в исключении переменных $q_1(\tau)$ и $q_4(\tau)$ с помощью первых интегралов. Так как учет постоянных c_i $(i = \overline{1,3})$ в (1.7) приводит к системе третьего порядка, в которой c_i входят в неоднородную часть, а положительные характеристические числа системы такого класса могут иметь только общее решение однородной системы, то в процессе редукции (1.16) будем полагать $c_i = 0$ $(i = \overline{1,3})$. В силу предположения $h \in (0,1)$ имеем $\alpha_1(\tau) > 0$ при всех значениях τ. Используя это обстоятельство, из первого и третьего равенств системы (1.17) найдем

$$
q_4(\tau) = -\frac{1}{\alpha_1(\tau)}(\alpha_2(\tau)q_5(\tau) + \alpha_3(\tau)q_6(\tau)),
\tag{2.1}
$$

$$
q_1(\tau) = \frac{1}{2\varkappa^2\alpha_1(\tau)}\big(\alpha_1(\tau)\alpha_2(\tau)q_2(\tau) - \varkappa\alpha_2(\tau)q_5(\tau) - \varkappa\alpha_3(\tau)q_6(\tau)\big).
\tag{2.2}
$$

Если внести (2.1), (2.2) в правые части уравнений для $q_2(\tau)$, $q_3(\tau)$, $q_5(\tau)$, $q_6(\tau)$, то получим систему четвертого порядка.

Подставим (2.1), (2.2) во второе равенство из (1.17):

$$
\alpha_2(\tau)z_1 - \alpha_3(\tau)z_2 = 0,
\tag{2.3}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= (\alpha_1(\tau) + \varkappa^2)(\alpha_1(\tau)q_2(\tau) - 2\varkappa q_5(\tau)),\\
z_2 &= \varkappa\big[(\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2)q_6(\tau) - a\varkappa\alpha_1(\tau)q_3(\tau)\big].
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Чтобы избежать особенностей в использовании (2.3), введем новую переменную $u(\tau)$:

$$\alpha_3(\tau)z_1 + \alpha_2(\tau)z_2 = u(\tau). \tag{2.5}$$

Из (2.3), (2.5) определим

$$z_1 = \frac{\alpha_3(\tau)u(\tau)}{\alpha^2(\tau)}, \qquad z_2 = \frac{\alpha_2(\tau)u(\tau)}{\alpha^2(\tau)}, \qquad \alpha^2(\tau) = \alpha_2^2(\tau) + \alpha_3^2(\tau). \tag{2.6}$$

Здесь $\alpha^2(\tau) > 0$ при любых τ в силу соотношения $\alpha_1^2(\tau) + \alpha_2^2(\tau) + \alpha_3^2(\tau) = 1$ и $\alpha(\tau) < 1$. Тогда на основании (2.6) и обозначений (2.4) получим

$$q_3(\tau) = \frac{1}{a\varkappa^2\alpha_1(\tau)}\Big[\varkappa(\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2)q_4(\tau) - \frac{\alpha_2(\tau)u(\tau)}{\alpha^2(\tau)}\Big], \tag{2.7}$$

$$q_5(\tau) = \frac{1}{2\varkappa}\Big[\alpha_1(\tau)q_2(\tau) - \frac{\alpha_3(\tau)u(\tau)}{\alpha^2(\tau)(\alpha_1(\tau) + \varkappa^2)}\Big]. \tag{2.8}$$

В результате редукции системы (1.16) с помощью преобразований (2.1), (2.2), (2.7), (2.8) получим систему третьего порядка относительно функций $q_2(\tau)$, $q_6(\tau)$, $u(\tau)$:

$$q_2'(\tau) = \frac{1}{a\varkappa\alpha_1(\tau)}\Big[2\varkappa\big(\varkappa^2(a-2) - \alpha_1(\tau)\big)q_6(\tau) - \frac{\alpha_2(\tau)(a-2)u(\tau)}{\alpha^2(\tau)}\Big], \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} q_6'(\tau) = \frac{1}{4\varkappa^2\alpha_1(\tau)}\Big[&\alpha_1(\tau)(\alpha_2^2(\tau) + 2\varkappa^2\alpha_1(\tau))q_2(\tau) + 6\varkappa\alpha_2(\tau)\alpha_3(\tau)q_6(\tau) - \\ &- \frac{2\alpha_3(\tau)u(\tau)}{\alpha^2(\tau)(\alpha_1(\tau) + \varkappa^2)}(3\alpha_2^2(\tau) - 2\varkappa^2\alpha_1(\tau))\Big], \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} u'(\tau) = \frac{1}{2\varkappa\alpha_1(\tau)}\Big\{&\alpha_1(\tau)\alpha_2(\tau)\alpha^2(\tau)(\alpha_1(\tau) + \varkappa^2)q_2(\tau) + 2\alpha_3(\tau)\varkappa^2\alpha^2(\tau)(\alpha_1(\tau) + \varkappa^2)q_6(\tau) - \\ &- \frac{\alpha_2(\tau)\alpha_3(\tau)}{\alpha^2(\tau)(\alpha_1(\tau) + \varkappa^2)}\big[\alpha_1(\tau)(4\alpha_1^2(\tau) - \alpha^2(\tau)) + \varkappa^2(4\alpha_1^2(\tau) + \alpha^2(\tau))\big]u(\tau)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

В силу (1.13), (2.1), (2.2), (2.7), (2.8), система (2.9)–(2.11) имеет частное решение

$$\begin{gathered} q_2^*(\tau) = -\alpha_3(\tau), \quad q_6^*(\tau) = -\frac{1}{\varkappa}\alpha_2(\tau)(\alpha_1(\tau) + \varkappa^2), \\ u^*(\tau) = -\alpha^2(\tau)(\alpha_1(\tau) + \varkappa^2)(\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Переменные $q_1(\tau)$, $q_3(\tau)$, $q_4(\tau)$, $q_5(\tau)$ выражаются через переменные $q_2(\tau)$, $q_6(\tau)$, $u(\tau)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= \frac{1}{2\varkappa^2\alpha_1(\tau)}\Big(\alpha_1(\tau)\alpha_2(\tau)q_2(\tau) - \varkappa\alpha_2(\tau)q_5(\tau) - \varkappa\alpha_3(\tau)q_6(\tau)\Big), \\ q_3(\tau) &= \frac{1}{a\varkappa^2\alpha_1(\tau)}\Big[\varkappa(\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2)q_6(\tau) - \frac{\alpha_2(\tau)u(\tau)}{\alpha^2(\tau)}\Big], \\ q_4(\tau) &= -\frac{1}{\alpha_1(\tau)}(\alpha_2(\tau)q_5(\tau) + \alpha_3(\tau)q_6(\tau)), \\ q_5(\tau) &= \frac{1}{2\varkappa}\Big[\alpha_2(\tau)q_2(\tau) - \frac{\alpha_3(\tau)u(\tau)}{\alpha^2(\tau)(\alpha_1(\tau) + \varkappa^2)}\Big]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Так как в предположении $h \in (0,1)$ здесь $\alpha_1(\tau) > 0$, то уравнения (2.9)–(2.11) и равенства (2.13) не имеют особенностей.

3. Второй этап редукции уравнений (1.16)

Для симметричной записи системы (2.9)–(2.11) сделаем переобозначение

$$q_2(\tau) = x_1(\tau), \qquad q_4(\tau) = x_2(\tau), \qquad u(\tau) = x_3(\tau). \tag{3.1}$$

Тогда из (2.9)–(2.11) получим

$$\begin{aligned} x_1'(\tau) &= p_{12}(\tau)x_2 + p_{13}(\tau)x_3, \\ x_2'(\tau) &= p_{21}(\tau)x_1 + p_{22}(\tau)x_2 + p_{23}(\tau)x_3, \\ x_3'(\tau) &= p_{31}(\tau)x_1 + p_{32}(\tau)x_2 + p_{33}(\tau)x_3, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где функции $p_{ij}(\tau)$ легко получить из (2.9)–(2.11). В силу (2.12), сопряженная к (3.2) система

$$\begin{aligned} y_1'(\tau) &= -(p_{21}(\tau)y_2 + p_{31}(\tau)y_3), \\ y_2'(\tau) &= -(p_{12}(\tau)y_1 + p_{22}(\tau)y_2 + p_{32}(\tau)y_3), \\ y_3'(\tau) &= -(p_{13}(\tau)y_1 + p_{23}(\tau)y_2 + p_{33}(\tau)y_3) \end{aligned} \tag{3.3}$$

имеет первый интеграл

$$\alpha_3(\tau)y_1(\tau) + \frac{\alpha_2(\tau)(\alpha_1(\tau) + \varkappa^2)y_2(\tau)}{\varkappa} + \alpha^2(\tau)(\alpha_1(\tau) + \varkappa^2)(\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2)y_3(\tau) = c_3, \tag{3.4}$$

где c_3 — произвольная постоянная. Из (3.4) без особенностей в знаменателе можно определить y_3 (полагаем $c_3 = 0$):

$$y_3(\tau) = -\frac{\alpha_3(\tau)y_1(\tau) + \dfrac{\alpha_2(\tau)(\alpha_1(\tau) + \varkappa^2)}{\varkappa}y_2(\tau)}{\alpha^2(\tau)(\alpha_1(\tau) + \varkappa^2)(\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2)}. \tag{3.5}$$

С помощью выражения (3.5) систему (3.3) приведем к системе второго порядка

$$\begin{aligned} y_1'(\tau) &= f_1(\tau)y_1(\tau) + f_2(\tau)y_2(\tau), \\ y_2'(\tau) &= f_3(\tau)y_1(\tau) + f_4(\tau)y_2(\tau), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= \frac{\alpha_2(\tau)\alpha_3(\tau)}{2\varkappa(\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2)}, \quad f_2(\tau) = \frac{\alpha_1(\tau)(\alpha_2^2(\tau) - 4\varkappa^4 - 2\alpha_1(\tau)\varkappa^2)}{4\varkappa^2(\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2)}, \\ f_3(\tau) &= \frac{a\alpha_3^2(\tau) + 2(\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2)(\alpha_1(\tau) + (2-a)\varkappa^2)}{a\alpha_1(\tau)(\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2)}), \\ f_4(\tau) &= -\frac{\alpha_2(\tau)\alpha_3(\tau)(\alpha_1(\tau) + 4\varkappa^2)}{2\varkappa\alpha_1(\tau)(\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Далее будет показано, что выбором параметра $\varkappa$ на основании ограниченности функций $\alpha_i(\tau)$ $(i = \overline{1,3})$ можно добиться условия $f_3(\tau) \neq 0$ для любых τ, поэтому для сведения системы (3.6) к уравнению второго порядка из второго уравнения системы (3.6) определим

$$y_1(\tau) = \frac{1}{f_3(\tau)}\,(y_2'(\tau) - f_4(\tau)y_2(\tau)). \tag{3.8}$$

Подставим выражение (3.8) в первое уравнение системы (3.6)

$$\begin{aligned} y_2''(\tau) - (f_1(\tau) + f_4(\tau) + (\ln|f_3(\tau)|)')y_2'(\tau) + (f_1(\tau)f_4(\tau) - f_2(\tau)f_3(\tau) - \\ - f_4'(\tau) + f_4(\tau)(\ln|f_3(\tau)|)')y_2(\tau) = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

С помощью замены

$$y_2(\tau) = W(\tau)\sqrt{\frac{\alpha_1(\tau)}{\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2}|f_3(\tau)|} \tag{3.10}$$

уравнение (3.9) приведем к уравнению второго порядка класса Хилла

$$W''(\tau) + p(\tau)W(\tau) = 0, \tag{3.11}$$

где

$$\begin{aligned} p(\tau) = \frac{1}{4f_3^2(\tau)}\big[2f_3(\tau)f_3''(\tau) - 3(f_3'(\tau))^2 + 2f_3^2(\tau)(f_1(\tau) - f_4(\tau))' - \\ - 2f_3(\tau)f_3'(\tau)(f_1(\tau) - f_4(\tau)) - f_3^2(\tau)(f_1(\tau) - f_4(\tau))^2 - 4f_2(\tau)f_3^3(\tau)\big]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

В уравнении (3.11) $W(\tau)$ — новая переменная.

Преобразуем выражение (3.12), используя обозначения (3.7):

$$\begin{aligned} p(\tau) = \frac{1}{4\varkappa^2\alpha_1^4(\tau)f_3^2(\tau)\sigma^4(\tau)}\Big\{8\alpha_1(\tau)\alpha_2^2(\tau)\alpha_3^2(\tau)\sigma(\tau)[(2-a)\sigma^2(\tau) + a\alpha_1(\tau)\sigma(\tau) + \\ + a\sigma_3^2(\tau)][(a-2)\sigma^2(\tau) - 2\alpha_1(\tau)(a-1)\sigma(\tau) - a\alpha_3^2(\tau)] - \\ - 3\alpha_2^2(\tau)\alpha_3^2(\tau)[(a-2)\sigma^3(\tau) - 2\alpha_1(\tau)(a-1)\sigma^2(\tau) - a\sigma(\tau)(\alpha_1^2(\tau) + \alpha_3^2(\tau)) - \\ - a\alpha_1(\tau)\alpha_3^2(\tau)]^2 + 4\sigma^2(\tau)[(2-a)\sigma^2(\tau) + a\alpha_1(\tau)\sigma(\tau) + a\alpha_3^2(\tau)]^2 \times \\ \times [\alpha_1(\tau)(\alpha_3^2(\tau) - \alpha_2^2(\tau))\sigma(\tau) + \alpha_2^2(\tau)\alpha_3^2(\tau) - \alpha_1^2(\tau)\alpha^2(\tau)] + \\ + [(2-a)\sigma^2(\tau) + a\alpha_1(\tau)\sigma(\tau) + a\alpha_3^2(\tau)][(a-2)\sigma^3(\tau) - 2\alpha_1(\tau)(a-1)\sigma^2(\tau) - \\ - a(\alpha_1^2(\tau) + \alpha_3^2(\tau))\sigma(\tau) - a\alpha_1(\tau)\alpha_3^2(\tau)][2\alpha_1(\tau)(\alpha_3^2(\tau) - \alpha_2^2(\tau))\sigma^2(\tau) - \\ - 2(\alpha_1^2\alpha^2(\tau) + 6\alpha_2^2(\tau)\alpha_3^2(\tau))\sigma(\tau) - 8\alpha_1(\tau)\alpha_2^2(\tau)\alpha_3^2(\tau)] + \\ + \frac{4}{a}\alpha_1^2(\tau)(\sigma^2(\tau) - \alpha_1(\tau)\sigma(\tau) - \alpha_2^2(\tau))[(2-a)\sigma^2(\tau) + a\alpha_1(\tau)\sigma(\tau) + a\alpha_3^2(\tau)]^3\Big\}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $\sigma(\tau) = \alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2$. Представим выражение в фигурных скобках в виде

$$p^*(\tau) = \frac{4\alpha_1^2(\tau)}{a}\,(2-a)^3\varkappa^{16} + \ldots, \tag{3.14}$$

где троеточием обозначены члены по $\varkappa$ порядка ниже шестнадцатого.

Приведение полного выражения $p(\tau)$ в (3.13) связано с тем, что при исследовании свойств решений уравнения Хилла (3.11) с функцией $p(\tau)$ из (3.13) возможны различные методы, обзор которых изложен в [24]. В частности, метод А. М. Ляпунова [13] предполагает использовать для функций $p^*(\tau)$ выражение (3.14).

Будем предполагать, что $a > 2$, то есть параметр изменяется в интервале $(2, 3)$. Положим, что параметр $\varkappa$ принимает большие значения. Тогда из (3.14) в силу $\alpha_i(\tau) > 0$ следует, что выбором таких значений $\varkappa$ можно добиться условия $p^*(\tau) < 0$ для всех значений τ. В силу условия Ляпунова [13] уравнение (3.11) будет допускать два решения, имеющие разные по знаку характеристические числа. Поскольку для системы (1.16) необходимо решение с положительным характеристическим числом, то из решения сопряженной системы выбираем решение с отрицательным характеристическим числом

$$W_*(\tau) = \psi(\tau)e^{\lambda\tau}, \tag{3.15}$$

где $\psi(\tau)$ — некоторая периодическая функция переменной τ $(\lambda > 0)$.

4. Способ построения асимптотического ряда (1.15)

Для нахождения решения системы (1.16) с положительным характеристическим числом необходимо указанные выше преобразования рассмотреть в обратном порядке. Например, из (3.10), (3.15) определим

$$y_2^*(\tau) = \psi(\tau)e^{\lambda\tau}\sqrt{\frac{\alpha_1(\tau)}{\alpha_1(\tau) + 2\varkappa^2}\,|f_3(\tau)|}. \tag{4.1}$$

Характеристическое число функции (4.1) равно $-\lambda$. После нахождения (4.1) переменную $y_1^*(\tau)$ определим из (3.8). Соотношение (3.5) служит для нахождения $y_3^*(\tau)$. Все полученные функции имеют отрицательное характеристическое число. Таким образом, построено решение сопряженной системы (3.3), которое имеет отрицательное характеристическое число. Этому решению в силу периодичности функций $p_{ij}(\tau)$ соответствует решение $x_i^*(\tau)$ $(i = \overline{1, 3})$ уравнений (3.2), характеристическое число которого положительно [24]. На основании невырожденного преобразования, определяемого формулами (2.1), (2.2), (2.7), (2.8), линейная система (1.16) имеет решение с положительным характеристическим числом. Таким образом, при рассмотрении асимптотических решений уравнений в возмущениях, предельным решением которых является решение Бобылева – Стеклова при $a \in (2, 3)$ и достаточно больших значениях $\varkappa$, существует класс асимптотических решений уравнений Эйлера – Пуассона (1.5), (1.6). Этот класс решений существует в виде рядов А. М. Ляпунова [13].

Заключение

В динамике твердого тела применяются различные методы интегрирования уравнений движения: метод Якоби, метод инвариантных соотношений [18] построения решений в конечной форме, метод компьютерной динамики и метод хаотической динамики [25] и другие. Поскольку в общем случае уравнения Эйлера – Пуассона неинтегрируемы в квадратурах, то актуальными являются подход хаотической динамики [25] и подход, который основан на исследовании окрестности известных решений. В данной работе установлены условия существования асимптотических движений гироскопа Бобылева – Стеклова, описываемые рядами Ляпунова [13].

Список литературы

[1] Kneser A. Studien über Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtsglage (zwieter Aufsatz) // J. Reine Angew. Math., 1897, vol. 11, no. 3, pp. 186–223.

[2] Perron O. Über Stabilität und asymptotischen Verhalten der Integrale von Differentialgleichungs-system // Math. Z., 1929, vol. 29, pp. 129–160.

[3] Bohl P. Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage // J. Reine Angew. Math., 1904, vol. 127, no. 3, pp. 179–276.

[4] Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Мир, 1964. 477 с.

[5] Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 396 с.

[6] Болотин С. В., Козлов В. В. Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ., 1980, № 4, с. 84–89.

[7] Козлов В. В., Паламодов В. П. Об асимптотических решениях уравнений классической механики // Докл. АН СССР, 1982, т. 263, № 2, с. 285–289.

[8] Маркеев А. П. О плоских и близких к плоским вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР. МТТ, 1988, № 4, с. 29–36.

[9] Маркеев А. П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ, 2001, т. 65, № 1, с. 51–58.

[10] Маркеев А. П. Об устойчивости регулярной прецессии несимметричного гироскопа (случай Гриоли) // Докл. РАН, 2002, т. 387, № 3, с. 338–342.

[11] Маркеев А. П. Об устойчивости прецессии Гриоли // ПММ, 2003, т. 67, № 4, с. 556–572.

[12] Маркеев А. П. О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева – Чаплыгина // ПММ, 2004, т. 68, № 2, с. 282–293.

[13] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Москва – Ленинград: ГИТТЛ, 1950. С. 9–359.

[14] Вархалев Ю. П., Горр Г. В. Асимптотически маятниковые движения гироскопа Гесса – Аппельрота // ПММ, 1984, т. 48, № 3, с. 490–493.

[15] Брюм А. З. Исследование регулярной прецессии тяжелого твердого тела с неподвижной точкой первым методом Ляпунова // Механика твердого тела, 1987, № 19, с. 68–72.

[16] Mettler E. Periodische und asymptotische Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels // Math. Z., 1937, vol. 43, no. 1, pp. 59–100.

[17] Вархалев Ю. П., Ковалев В. М. Об асимптотически равномерных движениях гиростата относительно наклонной оси // Механика твердого тела, 1990, № 22, с. 43–48.

[18] Горр Г. В., Ковалев А. М. Движение гиростата. Киев: Наукова думка, 2013. 407 с.

[19] Вархалев Ю. П., Горр Г. В. Первый метод Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела // Механика твердого тела, 1992, № 24, с. 25–41.

[20] Бобылев Д. К. Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук общ-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии, 1896, т. 8, № 2, с. 21–25.

[21] Стеклов В. А. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. отд. физ. наук общ-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии, 1896, т. 8, № 2, с. 19–21.

[22] Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: НГУ, 1965. 221 с.

[23] Бардин Б. С. Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Бобылева – Стеклова // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 4, с. 535–550.

[24] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Москва: Наука, 1966. 532 с.

[25] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

On asymptotic motions of a heavy rigid body in the Bobylev – Steklov case

Gennady V. Gorr

Department of applied mechanics
State Institution “Institute of Applied Mathematics and Mechanics”
ul. Rose Luxembourg 74, Donetsk, 83114, DPR
gvgorr@gmail.com

The Bobylev – Steklov solution belongs to one of the most well-known particular solutions of the Euler – Poisson equation of the problem of motion of a heavy rigid body with a fixed point. It is characterized by two linear invariant relations and can be expressed as elliptic functions of time. The interpretation of the motion of the Bobylev – Steklov gyroscope was carried out by P. V. Kharlamov using the Poinsot method. Analysis of the neighborhood of the Bobylev – Steklov solution in the integral manifold of the Euler – Poisson equations was presented by B. S.Bardin for the case where this solution describes pendulum motions. It is therefore of interest to study the general case of the above-mentioned manifold. Using the first Lyapunov method, a new class of asymptotic motions is obtained for a heavy rigid body whose limit motions are described by the Bobylev – Steklov solution.

MSC 2010: 70E05, 70E17
Keywords: the first Lyapunov method, Bobylev – Steklov solution

Received May 05, 2016, accepted August 09, 2016
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 651–661 (Russian)